

# La proiezione ortogonale in spazi di Hilbert

(versione 2010-12-24)

**Lemma.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert,  $C$  un convesso non vuoto di  $H$ ,  $x \in H$ ,  $d = \text{dist}(x, C)$  ed  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\left( y_1, y_2 \in C, \quad \|x - y_1\| < d + \delta, \quad \|x - y_2\| < d + \delta \right) \Rightarrow \|y_1 - y_2\| < \varepsilon.$$

Possiamo prendere per esempio  $\delta = \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d$ .

**Dimostrazione.** Si veda la Figura 1 alla pagina seguente. Applichiamo l'identità del parallelogrammo ai due vettori  $y_1 - x, y_2 - x$ :

$$\begin{aligned} 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 + \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 = \\ &= \|y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 + y_2 - 2x\|^2 = \|y_1 - y_2\|^2 + \left\| 2\left(\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right) \right\|^2 = \\ &= \|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - x \right\|^2. \end{aligned}$$

Mettendo in evidenza  $\|y_1 - y_2\|^2$ :

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - x \right\|^2.$$

Il punto  $(y_1 + y_2)/2$  è il punto medio fra  $y_1$  e  $y_2$ , e si può scrivere della forma  $\theta y_1 + (1 - \theta)y_2$  con  $\theta = 1/2 \in [0, 1]$ . Quindi  $(y_1 + y_2)/2 \in C$ , perché  $C$  è convesso e  $y_1, y_2 \in C$ . Pertanto per definizione di distanza

$$\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - x \right\| \geq \text{dist}(x, C) = d.$$

Sia  $\delta > 0$  per ora generico e supponiamo che  $\|x - y_1\| < d + \delta$  e  $\|x - y_2\| < d + \delta$ . Risulta

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= 2\underbrace{\|y_1 - x\|^2}_{< d + \delta} + 2\underbrace{\|y_2 - x\|^2}_{< d + \delta} - 4\underbrace{\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - x \right\|^2}_{\geq d} < \\ &< 2(d + \delta)^2 + 2(d + \delta)^2 - 4d^2 = 4((d + \delta)^2 - d^2) = 8d\delta + 4\delta^2. \end{aligned}$$

L'enunciato risulta vero quando  $8d\delta + 4\delta^2 \leq \varepsilon^2$ , che equivale successivamente a

$$d^2 + 2d\delta + \delta^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (d + \delta)^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \quad \text{cioè} \quad \delta \leq \sqrt{d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}} - d.$$

Poiché  $\sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d > 0$  esistono certamente  $\delta > 0$  con la proprietà richiesta, e  $\delta = \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d$  è uno di questi.  $\square$

La scelta  $\delta = \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d$  non è ingrandibile, come si può intuire anche ragionando sui triangoli della figura.

**Proposizione.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert,  $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  un sistema ortonormale,  $M$  la chiusura del sottospazio vettoriale generato dagli  $u_\lambda$ , ed  $x \in H$ . Allora la proiezione ortogonale di  $x$  su  $M$  è data dalla somma (sommabile)

$$P_M x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda.$$

**Dimostrazione.** Si veda la Figura 2. Sia  $\varepsilon > 0$ ,  $d = \text{dist}(x, M)$ , e sia  $\delta > 0$  dato dalla proposizione precedente. Dato che  $P_M x$  è un elemento di  $M$ , esiste una combinazione lineare finita  $z$  di vettori del sistema ortonormale che si avvicina a  $P_M x$  meno di  $\delta$ :

$$\left\| P_M x - \underbrace{(a_1 u_{\lambda_1} + \cdots + a_n u_{\lambda_n})}_{=: z} \right\| < \delta.$$

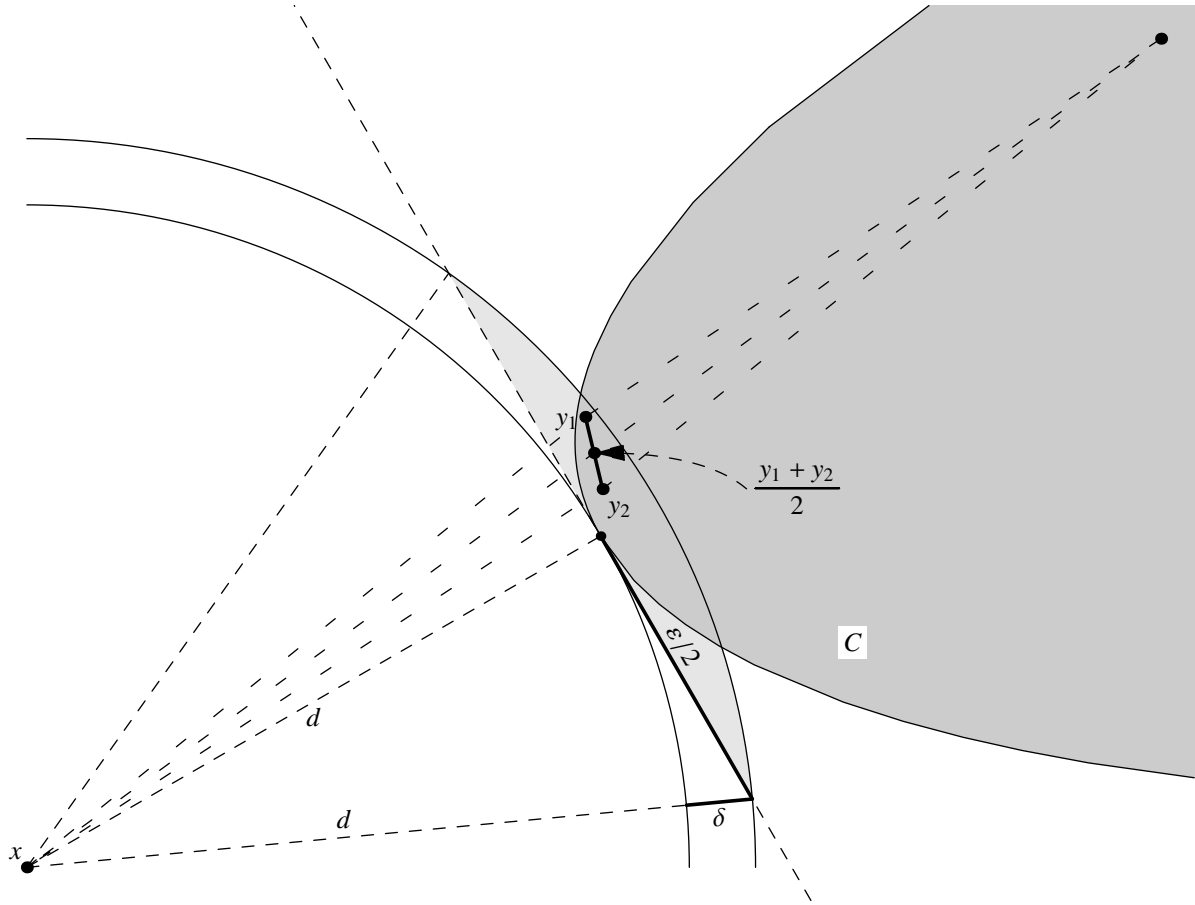


Fig. 1: Lemma sulla distanza da un convesso

Per la disuguaglianza triangolare

$$\|x - z\| \leq \|x - P_M x\| + \|P_M x - z\| < d + \delta.$$

Poniamo  $F_\varepsilon := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , e sia  $F$  un insieme finito tale che  $F_\varepsilon \subset F \subset \Lambda$ . Sia  $M_F$  il sottospazio vettoriale generato da  $\{u_\lambda : \lambda \in F\}$ . In particolare  $z \in M_F$ . La proiezione ortogonale di  $x$  su  $M_F$  per definizione dista da  $x$  non più di quanto ne disti  $z$ :

$$\|x - P_{M_F} x\| \leq \|x - z\| < d + \delta.$$

D'altra parte  $\|x - P_M x\| = d < d + \delta$ . Per la proposizione precedente allora

$$\|P_M x - P_{M_F} x\| < \varepsilon.$$

Essendo  $\{u_\lambda : \lambda \in F\}$  una base ortonormale di  $M_F$ , vale la formula della proiezione ortogonale su un sottospazio a dimensione finita:

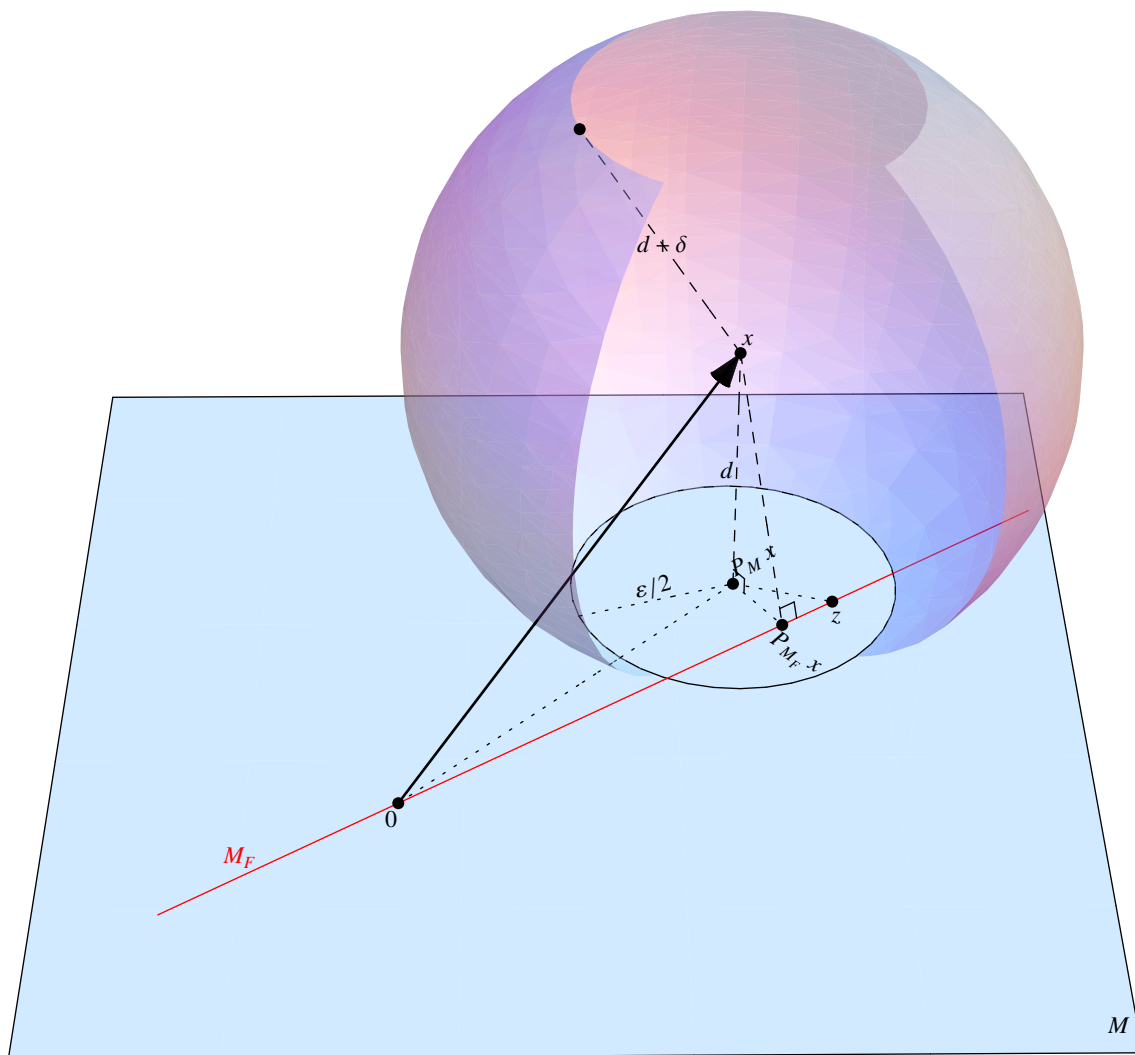
$$P_{M_F} x = \sum_{\lambda \in F} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda.$$

Abbiamo dimostrato che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $F_\varepsilon$  finito  $\subset \Lambda$  tale che per ogni  $F$  finito  $\supset F_\varepsilon$  si ha che

$$\left\| P_M x - \sum_{\lambda \in F} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda \right\| < \varepsilon.$$

Per definizione di sommabilità concludiamo che

$$P_M x = \sum_{\lambda \in F} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda. \quad \square$$

Fig. 2: Proiezione ortogonale di  $x$  su  $M$ .

**Proposizione.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert,  $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  un sistema ortonormale,  $a \in \ell^2(\Lambda)$ . Allora la somma

$$x := \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda u_\lambda$$

è sommabile e per ogni  $\lambda$  si ha  $a_\lambda = \langle x, u_\lambda \rangle$ .

**Dimostrazione.** La somma è sommabile perché i vettori sono a due a due ortogonali e

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda u_\lambda\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 = \int_\Lambda |a|^2 d\# = \|a\|_{\ell^2}^2 < +\infty.$$

Sia  $x$  la somma e  $\lambda_0 \in \Lambda$ . L'applicazione  $A: H \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $Az = \langle z, u_{\lambda_0} \rangle$  è lineare e continua. Quindi conserva la sommabilità:

$$\langle x, u_{\lambda_0} \rangle = Ax = A \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda u_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda Au_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \langle u_\lambda, u_{\lambda_0} \rangle.$$

Quest'ultima somma infinita ha addendi tutti nulli tranne forse quello con  $\lambda = \lambda_0$ , per cui

$$\langle x, u_{\lambda_0} \rangle = a_{\lambda_0} \cdot 1 = a_{\lambda_0}.$$

□